CS 03 Spécialité maths **Lundi 4 décembre 2023** **Gr Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 30 min**

<u>Exercice 1</u> [9 pts] [2 pt + 1 pt + 4 pts + 2 pt]
Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 3x - 5)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} + 3\right)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin(x) - e^x)$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} [(x - 7)e^{x-7}]$

<u>Exercice 2</u> [5 pts]
Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 7} + 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
Montrer que f admet une limite en $+\infty$, interpréter graphiquement.

<u>Exercice 3</u> [4 pts]
Pour $x \neq 3$ on pose :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-x + 3}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$ puis interpréter graphiquement.

<u>Exercice 4</u> [2 pts]
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com –Thiaude P. »

Corrigé
Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x-5)$

Pour tout $x \neq 0$, on a : $x^2+3x-5 = x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)$

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right) = 1$. Par limite d'un produit, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)\right] = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x-5) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+3\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ (cours) donc par limite d'une somme on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+3\right) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin(x)-e^x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, en retranchant e^x , on obtient : $-1-e^x \leqslant \sin(x)-e^x \leqslant 1-e^x$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^x) = -\infty$ puis par limite d'une différence : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^x) = -\infty$

On a : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x)-e^x \leqslant 1-e^x \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^x) = -\infty \end{cases}$

donc, d'après le théorème de comparaison on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin(x)-e^x) = -\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}]$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-7) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}] = \lim\limits_{x\to-\infty}(Xe^X) = 0$ (cours), on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-7)e^{x-7}] = 0$.

Exercice 2

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+7}+2$, **montrer que f admet une limite en $+\infty$, interpréter graphiquement**

Pour tout réel x : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc en divisant par $x^2+7>0$ on en déduit :

$$\frac{-1}{x^2+7} \leqslant \frac{\cos(x)}{x^2+7} \leqslant \frac{1}{x^2+7}$$
$$-\frac{1}{x^2+7} \leqslant \frac{\cos(x)}{x^2+7} \leqslant \frac{1}{x^2+7}$$

puis, en ajoutant 2 à chaque membre :

$$-\frac{1}{x^2+7}+2 \leqslant \frac{\cos(x)}{x^2+7}+2 \leqslant \frac{1}{x^2+7}+2$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+7) = +\infty$, puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+7} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2+7}\right] = 0$ puis par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2+7}+2\right] = 2$; de même, on montrerait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2+7}+2\right] = 2$.

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2+7}+2\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2+7}+2\right] = 2 \\ \forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{x^2+7}+2 \leqslant \frac{\cos(x)}{x^2+7}+2 \leqslant \frac{1}{x^2+7}+2 \end{cases}$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos(x)}{x^2+7}+2\right] = 2$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

La **droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de** $+\infty$.

Utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com –Thiaude P. »

Exercice 3

$\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{3}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{-\boldsymbol{x} + \mathbf{3}}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x)$ puis interpréter graphiquement.

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	0	$-$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (x^2 - x - 2) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (-x + 3) = 0^+$ donc par limite d'un quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \frac{x^2-x-2}{-x+3} = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty.$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (x^2 - x - 2) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (-x + 3) = 0^-$ donc par limite d'un quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \frac{x^2-x-2}{-x+3} = -\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\infty.$

On déduit des limites précédentes que **la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$**.

Exercice 4

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{4}} - \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+4-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 4) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ (cours)

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ (cours)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1}) = +\infty$ puis par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}} = 0$.

Conclusion :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{4}} - \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}\right) = \mathbf{0}$$

Utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com –Thiaude P. »